8 Das Leistungsdichtespektrum

$X = (X(t), t \in \mathcal{T})$ sei ein stationärer Prozess mit konstanter Mittelwertfunktion $\mathcal{E}X(t) = m_X$ und Autokorrelationsfunktion $R_X(t) = \mathcal{E}X(s+t)X^*(s)$. Wir nehmen für dieses und die folgenden Kapitel an, dass die betrachteten stationären Prozesse stets Mittelwert $m_X = 0$ besitzen (bzw. betrachten den Prozess $\tilde{X}(t) = X(t) - m_X$).
Die Autokorrelationsfunktion ist, wie in einem früheren Kapitel bereits gezeigt, eine **positiv semidefinite Funktion**, d.h. für beliebige $t_1, t_2, \ldots, t_n$ aus $\mathcal{T}$ und beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R_X(t_i - t_k) z_i z_k^* \geq 0 \tag{18}$$

Diese Eigenschaft gestattet eine Frequenzbereichsdarstellung und -analyse von stationären Prozessen. Wir behandeln dabei den zeitkontinuierlichen und den zeitdiskreten Fall getrennt.

8.1 Der zeitkontinuierliche Fall

$X(t)$ mit reellem Zeitargument $t \in (-\infty, \infty)$ sei ein stationärer Prozess mit $\mathcal{E}X(t) = 0$ und **stetiger** Autokorrelationsfunktion $R_X(t)$. Aus der Eigenschaft (18) folgt insbesondere $R_X(0) \geq 0$. Wenn wir den uninteressanten Fall $X(t) = 0$ für alle t ausschließen, können wir annehmen, dass

$$r_0 := R_X(0) > 0$$

Für derartige Funktionen $R_X(t)$ gilt der Satz von Bochner, den wir hier in einer an den ersten Teil der Vorlesung angepassten Terminologie formulieren:

Satz 8.1 ***(Bochner)***
Zu einer stetigen positiv semidefiniten Funktion $R_X(t)$ mit $r_0 = R_X(0) > 0$ gibt es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf der reellen Zahlengeraden so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$R_X(t) = \int e^{j2\pi ft} r_0 P(\mathrm{d}f) \tag{19}$$

Einen Beweis findet man z.B. bei Cramèr und Leadbetter [1] in Kapitel 7.4.

Für die Anwendungen ist nur der Fall interessant, dass die Verteilung P absolutstetig ist, d.h. eine Dichte $g(f)$ besitzt. Die Funktion $S_X(f) = r_0 g(f)$ ist dann reellwertig und nichtnegativ und besitzt die Eigenschaft

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} S_X(f)\, \mathrm{d}f \tag{20}$$

woraus speziell

$$\mathcal{E}|X(t)|^2 = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, \mathrm{d}f \tag{21}$$

folgt. Man kann R_X als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit Frequenzen f interpretieren und die mittlere Leistung $\mathcal{E}|X(t)|^2$ als *Summe* von Leistungsanteilen $S_X(f)\mathrm{d}f$ bei Frequenzen f. Daraus resultiert die folgende Bezeichnung:

Definition 8.1 *Ist $X(t)$ ein stationärer Prozess mit $t \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Autokorrelationsfunktion $R_X(t)$ der Form (20), so heißt die Funktion $S_X(f)$ das* **Leistungsdichtespektrum (LDS)** *des Prozesses $X(t)$.*

Falls das Integral existiert, gilt umgekehrt

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi ft} R_X(t)\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

d.h. $S_X(f)$ ist die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion.

Anmerkungen zur Fouriertransformation

1. Wir verwenden die symmetrische Form der Fouriertransformation mit Zeitvariabler t und Frequenzen f:

   $$\tilde{x}(f) = \mathcal{F}[x](f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi ft} x(t)\,\mathrm{d}t$$

   mit der inversen Fouriertransformation

   $$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{x}](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi ft} \tilde{x}(f)\,\mathrm{d}f$$

2. Der Umgang mit Fourierintegralen wird mathematisch nicht allzu streng gehandhabt. Wir nehmen stets an, dass die nötigen Voraussetzungen gegeben sind, wobei auch verallgemeinerte Funktionen wie die Diracsche Deltafunktion als Integranden und Lösungen zugelassen sind.

Aus dem Satz von Bochner folgt bereits, dass das LDS reell und nichtnegativ ist. Speziell für reelle stationäre Prozesse gilt noch

Satz 8.2 *Ist $X(t)$ ein reeller stationärer Prozess, so ist das LDS eine* **gerade Funktion***:*

$$S_X(-f) = S_X(f)$$

Beweis: Ist der Prozess $X(t)$ reell, dann auch die Autokorrelationsfunktion. Daher gilt

$$R_X(t) = R_X^*(-t) = R_X(-t)$$

d.h. $R_X(t)$ ist eine gerade Funktion. Für das LDS ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi ft} R_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\right) R_X(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi ft) R_X(t)\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi ft) R_X(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, weil der Integrand bezüglich der Variablen t eine ungerade Funktion ist.
Da $\cos(x) = \cos(-x)$ eine gerade Funktion ist, folgt

$$S_X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi(-f)t) R_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f t) R_X(t)\,\mathrm{d}t = S_X(f)$$

$\diamond\diamond\diamond$

8.1.1 Beispiele

1. Das Zufallstelegraphensignal

Für $R_X(t) = \mathrm{e}^{-2\lambda|t|}$ erhält man

$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2\lambda t}\mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{e}^{-j2\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(2\lambda - j2\pi f)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2\lambda + j2\pi f)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \mathrm{e}^{(2\lambda - j2\pi f)t}\,\mathrm{d}t + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \mathrm{e}^{-(2\lambda + j2\pi f)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{(2\lambda - j2\pi f)t}}{2\lambda - j2\pi f}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(2\lambda + j2\pi f)t}}{2\lambda + j2\pi f}\right]_0^b \\
&= \frac{1}{2\lambda - j2\pi f} - \lim_{a\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\lambda a}\mathrm{e}^{-j2\pi f a}}{2\lambda - j2\pi a} + \frac{1}{2\lambda + j2\pi f} - \lim_{b\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda b}\mathrm{e}^{j2\pi f b}}{2\lambda + j2\pi b} \\
&= \frac{1}{2\lambda - j2\pi f} + \frac{1}{2\lambda + j2\pi f} \\
&= \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2}
\end{aligned}$$

2. Kosinusschwingung mit zufälliger Phase

Die Autokorrelationsfunktion $R_X(t) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 t)$ liefert als LDS die Distribution

$$S_X(f) = \frac{a^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{a^2}{4}\delta(f + f_0)$$

wovon man sich durch Berechnen der inversen Fouriertransformierten leicht überzeugen kann.

3. Weißes Rauschen

Bandbegrenztes weißes Rauschen hat ein LDS der Form

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & , \quad -W \le f \le W \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die mittlere Leistung ist

$$\mathcal{E}|X(t)|^2 = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2}\,\mathrm{d}f = N_0 W$$

wozu jede Frequenz im Bereich $[-W, W]$ den gleichen Anteil beiträgt.
Die zugehörige Autokorrelationsfunktion ist

$$\begin{aligned} R_X(t) &= \frac{1}{2}N_0 \int_{-W}^{W} \mathrm{e}^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2}N_0 \frac{\mathrm{e}^{-j2\pi Wt} - \mathrm{e}^{j2\pi Wt}}{-j2\pi t} \\ &= \frac{N_0 \sin(2\pi Wt)}{2\pi t} \end{aligned}$$

Für $W \longrightarrow \infty$ erhält man das LDS $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$ für $-\infty < f < \infty$ mit unendlicher mittlerer Leistung und der Autokorrelationsfunktion

$$R_X(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$$

8.1.2 Das Kreuzleistungsspektrum

Zwei stochastische Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ heißen gemeinsam stationär, wenn sie stationär sind und die Kreuzkorrelation von X und Y nur von der Zeitdifferenz abhängt:

$$\mathcal{E}X(s+t)Y^*(s) = R_{XY}(t)$$

für alle s und t. Dementsprechend führen wir die folgende Größe ein:

Definition 8.2

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi ft} R_{XY}(t)\,\mathrm{d}t$$

heißt das **Kreuzleistungsspektrum** *der gemeinsam stationären Prozesse X und Y.*

Die Funktion $S_{XY}(f)$ ist im allgemeinen komplexwertig. Wegen $R_{XY}(t) = R^*_{YX}(-t)$ gilt

$$S_{XY}(f) = S^*_{YX}(f)$$

Beispiel 8.1 *Sind $X(t)$ und $Y(t)$ gemeinsam stationäre Prozesse, so besitzt die Summe $Z(t) = X(t) + Y(t)$ die Autokorrelationsfunktion*

$$\begin{aligned} R_Z(t) &= \mathcal{E}Z(s+t)Z^*(s) \\ &= \mathcal{E}\left[X(s+t) + Y(s+t)\right]\left[X^*(s) + Y^*(s)\right] \\ &= \mathcal{E}X(s+t)X^*(s) + \mathcal{E}X(s+t)Y^*(s) + \mathcal{E}Y(s+t)X^*(s) + \mathcal{E}Y(s+t)Y^*(s) \\ &= R_X(t) + R_{XY}(t) + R_{YX}(t) + R_Y(t) \end{aligned}$$

und das LDS

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= S_X(f) + S_{XY}(f) + S_{YX}(f) + S_Y(f) \\ &= S_X(f) + S_{XY}(f) + S_{XY}^*(f) + S_Y(f) \\ &= S_X(f) + 2\mathrm{Re}\, S_{XY}(f) + S_Y(f) \end{aligned}$$

Beispiel 8.2 *Für eine um d Zeiteinheiten verzögerte Version $Y(t) = X(t-d)$ eines stationären Prozesses $X(t)$ gilt*

$$\mathcal{E}Y(s+t)Y^*(s) = \mathcal{E}X\left((s-d)+t\right)X*(s-d) = R_X(t)$$

d.h. $R_Y(t) = R_X(t)$ und damit $S_Y(f) = S_X(f)$. Der Unterschied wirkt sich nur in der Kreuzkorrelation aus:

$$R_{XY}(t) = \mathcal{E}Y(s+t)X^*(s) = \mathcal{E}X\left(s+(t-d)\right)X^*(s) = R_X(t-d)$$

Mit der Variablensubstitution $s = t - d$ erhält man für das Kreuzleistungsspektrum:

$$\begin{aligned} S_{XY}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi ft} R_X(t-d)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi fs} \mathrm{e}^{-j2\pi fd} R_X(s)\,\mathrm{d}s \\ &= S_X(f)\mathrm{e}^{-j2\pi fd} \\ &= S_X(f)\cos(2\pi fd) - jS_X(f)\sin(2\pi fd) \end{aligned}$$

Definition 8.3 *Die Funktion*

$$G_{XY}(f) = \frac{S_{XY}(f)}{\sqrt{S_X(f)S_Y(f)}}$$

heißt die **Kohärenzfunktion** *der Prozesse X und Y.*

8.2 Der zeitdiskrete Fall

$X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ sei eine stationäre Folge von Zufallsvariablen mit $\mathcal{E}X_n = 0$ für alle n und der Autokorrelationsfunktion

$$R_X(k) = \mathcal{E}X_{n+k}X_n^*$$

Definition 8.4 *Die Fourierreihe*

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k)\mathrm{e}^{-j2\pi kf}\ ,\ -\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$$

heißt das **Leistungsdichtespektrum** *der Folge X.*

Es gilt

$$R_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) \mathrm{e}^{j2\pi kf} \,\mathrm{d}f$$

und $S_X(f)$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie das LDS von zeitkontinuierlichen Prozessen: $S_X(f) \geq 0$ und für reellwertige Prozesse $S_X(-f) = S_X(f)$.

Beispiel 8.3 *Zeitdiskretes weißes Rauschen: Ist X eine Folge von reellen unkorrelierten Zufallsvariablen X_n mit $\mathcal{E}X_n = 0$ und $\mathrm{var}(X_n) = \mathcal{E}X_n^2 =: \sigma_X^2$, so ist*

$$R_X(k) = \begin{cases} \sigma_X^2 & \text{für} \quad k = 0 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

und damit $S_X(f) = \sigma_X^2 = const$, d.h. alle Frequenzen sind gleichmäßig vertreten.

Beispiel 8.4 *Für die Folge der Zufallsvariablen $Y_n = X_n + \alpha X_{n-1}$ mit den X_n aus Beispiel 8.3 ist $\mathcal{E}Y_n = 0$ und*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}Y_{n+k}Y_n &= \mathcal{E}(X_{n+k} + \alpha X_{n+k-1})(X_n + \alpha X_{n-1}) \\ &= \mathcal{E}X_{n+k}X_n + \alpha\mathcal{E}X_{n+k}X_{n-1} + \alpha\mathcal{E}X_{n+k-1}X_n + \alpha^2\mathcal{E}X_{n+k-1}X_{n-1} \\ &= \begin{cases} (1+\alpha^2)\sigma_X^2 & , \quad k = 0 \\ \alpha\sigma_X^2 & , \quad k = \pm 1 \\ 0 & , \quad |k| > 1 \end{cases} \\ &= R_Y(k) \end{aligned}$$

$Y = (Y_n)$ ist damit stationär und besitzt das Leistungsdichtespektrum

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= R_Y(-1)\mathrm{e}^{j2\pi f} + R_Y(0) + R_Y(1)\mathrm{e}^{-j2\pi f} \\ &= \sigma_X^2 \left[(1+\alpha^2) + 2\alpha\cos(2\pi f) \right] \end{aligned}$$

Analog zum zeitkontinuierlichen Fall definieren wir

Definition 8.5 *Für zwei gemeinsam stationäre Folgen (X_n) und (Y_n) von Zufallsvariablen mit der Kreuzkorrelationsfunktion*

$$R_{XY}(k) = \mathcal{E}X_{n+k}Y_n^*$$

heißt

$$S_{XY}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XY}(k)\mathrm{e}^{-j2\pi kf}$$

das **Kreuzleistungsspektrum** *der Folgen (X_n) und (Y_n).*

9 Lineare zeitinvariante Systeme

Lineare zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme) sind Abbildungen $y(t) = T[x](t)$, die ein (deterministisches) Eingangssignal $x(t)$ in ein Ausgangssignal $y(t)$ transformieren und die Eigenschaften der **Linearität**

$$T[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2](t) = \alpha_1 T[x_1](t) + \alpha_2 T[x_2](t)$$

und der **Zeitinvarianz**

$$T[x(\bullet - \tau)](t) = T[x](t - \tau)$$

besitzen. Wir befassen uns in diesem Kapitel mit stochastischen Eingangssignalen.

9.1 Der zeitkontinuierliche Fall

Im zeitkontinuierlichen Fall lässt sich ein LZI-System im Zeitbereich durch

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{23}$$

Die Funktion $h(t)$ heißt die **Impulsantwort**, da sie die Antwort $h(t) = T[\delta](t)$ des Systems auf einen Dirac-Impuls als Eingangssignal darstellt.

Das System heißt **kausal**, wenn $h(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Nach (23) bedeutet das, dass das Ausgangssignal $y(t)$ zum Zeitpunkt t nur aus Eingangsignalwerten $x(s)$ mit $s \leq t$ zusammengesetzt wird und keine Vorwegnahme der Zukunft stattfindet.

Definition 9.1 *Die Fouriertransformierte*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi f t} h(t)\,\mathrm{d}t$$

der Impulsantwort heißt die **Übertragungsfunktion** *des Sytems.*

$X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ sei wieder ein stationärer Prozess mit Mittelwert $\mathcal{E}X(t) = m_x = 0$ und Autokorrelationsfunktion $R_X(t)$.
Wir definieren einen neuen stochastischen Prozess $Y(t)$ durch

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)X(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)\,\mathrm{d}s$$

wobei das Integral im quadratischen Mittel zu verstehen ist. Dann kann man auf die in diesem Zusammenhang übliche Weise zeigen, dass der Erwartungswert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}Y(t) &= \mathcal{E}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)X(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathcal{E}X(t-s)\,\mathrm{d}s \\
&= m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,\mathrm{d}s = m_X H(0) = 0
\end{aligned}$$

gegeben ist.
Die Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}Y(s+t)Y^*(s) &= \mathcal{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(s+t-u)\,\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)X^*(s-v)\,\mathrm{d}v\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)\mathcal{E}[X(s+t-u)X^*(s-v)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)R_X(t-u+v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= R_Y(t)
\end{aligned}$$

von Y hängt offensichtlich nur von der Zeitdifferenz t ab. Y ist damit ein stationärer Prozess mit dem Leistungsdichtespektrum

$$\begin{aligned}
S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)R_X(t-u+v)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Variablensubstitution $s = t-u+v$ ergibt

$$\begin{aligned}
S_Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)R_X(s)\mathrm{e}^{-j2\pi f(s+u-v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\mathrm{e}^{-j2\pi fu}\,\mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)\mathrm{e}^{j2\pi fv}\,\mathrm{d}v \int_{-\infty}^{\infty} R_X(s)\mathrm{e}^{-j2\pi fs}\,\mathrm{d}s \\
&= H(f)H^*(f)S_X(f) \\
&= |H(f)|^2 S_X(f)
\end{aligned}$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
R_{YX}(t) &= \mathcal{E}Y(s+t)X^*(s) \\
&= \mathcal{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(s+t-u)\,\mathrm{d}uX^*(s)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\mathcal{E}[X(s+t-u)X^*(s)]\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(t-u)\,\mathrm{d}u \\
&= (h * R_X)(t)
\end{aligned}$$

woraus sich das Kreuzleistungsspektrum

$$S_{YX}(f) = H(f)S_X(f)$$

mit

$$S_{XY}(f) = S^*_{YX}(f) = H^*(f)S_X(f)$$

ergibt.

9.2 Der zeitdiskrete Fall

Im zeitdiskreten Fall ist die Impulsantwort eine Folge $h = (h_n, n \in \mathbb{Z})$ mit der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \mathrm{e}^{-j2\pi kf}$$

und die stationäre Folge $Y = (Y_n)$ ergibt sich aus $X = (X_n)$ durch

$$Y_k = (h * X)_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n X_{k-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{k-n} X_n$$

Die Formeln für das Leistungsdichtespektrum und das Kreuzleistungsdichtespektrum bleiben die gleichen wie im zeitkontinuierlichen Fall.

Die in der Praxis wichtigsten Prozesse dieser Art sind die sog. ARMA-Prozesse (*autoregressive moving average*)

$$Y_k = -\sum_{n=1}^{q} \alpha_n Y_{k-n} + \sum_{m=0}^{p} \beta_m X_{k-m}$$

wo $X = (X_n)$ zeitdiskretes weißes Rauschen ist. Die Übertragungsfunktion ist

$$H(f) = \frac{\sum_{m=0}^{p} \beta_m \mathrm{e}^{-j2\pi mf}}{1 + \sum_{n=1}^{q} \alpha_n \mathrm{e}^{-j2\pi nf}}$$

und die LDS

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 \sigma_X^2$$

Im Fall $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$ spricht man von einem autoregressiven Prozess und im Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0$ von einem gleitenden Mittelwertprozess (moving average process).